PROJET 2

Important: Sauf mention contraire, toutes les questions devront être traitées à l'aide de Maple.

1 Quaternions

On note $\mathbb{H}$ l'ensemble[1] des matrices $M_{\alpha,\beta}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ de la forme

$$M_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Question 1: Ecrire une procédure *VerifQuaternions(M)* qui renvoie vrai si la matrice M est un quaternion et faux sinon.

Question 2: Ecrire une procédure *Quaternion(α, β)* qui renvoie la matrice $M_{\alpha,\beta}$, ainsi que la procédure inverse *ParametresQuaternion(M)* (qui renvoie les nombres complexes α et β associé au quaternion M).

Question 3: Justifier (par un argument théorique simple) que $\mathbb{H}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ mais pas sur $\mathbb{C}$.

On definit les matrices suivantes:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ et\ K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Question 4: Justifier que $(1, I, J, K)$ est une famille libre de $\mathbb{H}$. On admet que c'est une famille génératrice (et donc une base) de $\mathbb{H}$ Ecrire une procédure *CoordsQuaternion(M)* qui renvoie les coordonnées d'un quaternion M dans la base $(1, I, J, K)$.

Question 5: Ecrire la procédure inverse *MatriceQuaternion(a,b,c,d)*.

Question 6: Calculer les produits $I^2, J^2, K^2, IJ, JI, IK, KI, JK,$ et KJ. En déduire que le produit matriciel défini une structure d'anneau sur $\mathbb{H}$.

Question 7: Ecrire une procédure *Prod1(M1,M2)* qui renvoie le produit de deux quaternions $M1 = M_{\alpha,\beta}$ et $M2 = M_{\alpha',\beta'}$ sous forme matricielle. Ecrire une procédure *Prod2(a1,b1,c1,d1,a2,b2,c2,d2)* qui renvoie les coordonnées dans la base $(1, I, J, K)$ d'un produit de deux quaternions donnés par leurs coordonnées dans la base $(1, I, J, K)$.

Question 8: A quelle(s) condition(s) sur α et β la matrice $M_{\alpha,\beta}$ est-elle inversible? Que peut-on en conclure pour $\mathbb{H}$? Exprimer le déterminant (écrire une procédure) de $M_{\alpha,\beta}$ en fonction de ses coordonnées dans la base $(1, I, J, K)$.

[1] $\mathbb{H}$ est appelé *corps des quaternions*. La lettre $\mathbb{H}$ pour le désigner est un hommage à William Hamilton (1805 - 1865), leur découvreur.

Question 9: Le conjugué d'un quaternion $q = a.1 + b.I + c.J + d.K$ est le quaternion $q^* = a.1 - b.I - c.J - d.K$. Ecrire une procédure *Conj(M)* qui calcule l'expression du conjugué du quaternion M sous forme matricielle. Quelles sont les paramètres de $M^*_{\alpha,\beta}$ en fonction de α et β?

Question 10: Soit M, M' deux quaternions. Calculer les nombres $\frac{1}{2}Tr(M\cdot M^*)$ et $\frac{1}{4}Tr(M\cdot M'^* + M'\cdot M^*)$. Qu'observe-t-on?

2 Triangles

Dans cette section, on se place dans un plan identifié à $\mathbb{R}^2$. Les points seront représentés au choix par un vecteur ou par la liste de leurs coordonnées. Un choix cohérent dans tout le projet est préférable. Les coordonnées d'un point générique seront notées (x, y).

Question 11: Ecrire une procédure *Align(A,B,C)* qui renvoie vrai si les points A, B et C sont alignés et faux dans le cas contraire.

Question 12: Un triangle non plat peut aussi être défini comme intersection de trois demi-plans. Ecrire une procédure *Equations(A,B,C)* qui à trois points non alignés A,B et C associe les trois inéquations des demi-plans définissant le triangle ABC. Par exemple, *Equations(*$< 0, 0 >, < 1, 0 >, < 0, 1 >$*)* doit renvoyer le système d'inéquations

$$\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 1 - x\}$$

Question 13: Ecrire la procédure inverse *Sommets(ineq1,ineq2,ineq3)* qui, à un système de trois inéquations définissant un triangle, donne les coordonnées des trois sommets du triangle.

3 Polygônes réguliers et approximation de π

Question 14: Ecrire une procédure *PolyReg(n,centre,sommet)* qui dessine un polygône régulier ainsi que son cercle circonscrit, le nombre n de sommets, les coordonnées du centre et celles d'un sommet étant donnés en paramètres. Par exemple, *polyreg*(4,$< 0, 0 >, < 1, 0 >$) dessinera le carré de sommets $< 1, 0 >, < 0, 1 >, < -1, 0 >$ et $< 0, -1 >$.

Question 15: Ecrire une procédure *Aire(n,centre,sommet)* qui donne l'aire du polygone convexe construit dans la question précédente. L'aire du polygone est une approximation de l'aire du disque délimité par cercle circonscrit au polygone (le vérifier par un calcul de limite). On construit un polygone régulier dans le but d'approximer π à 10^{-9} près. Combien de côtés au minimum est-il nécessaire?

Question 16: On peut trouver des manière d'approximer π beaucoup plus efficaces. Par exemple[2], on admet que la série entière $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{(4k)!\ (1103 + 26390k)}{(k!)^4\ 396^{4k}}$ converge vers $\frac{9801}{2\sqrt{2}\pi}$. Combien faut-il calculer de termes de la série pour calculer une approximation à 10^{-9} de π?

[2]formule découverte par Srinivasa Ramanujan (1887 - 1920) en 1910